

5 класс (продолжительность — 3.5 часа)

5-1. Вася ехал на машине, до светофора было 500 метров. И тут Вася увидел пять ворон, неподвижно сидящих вдоль дороги. Сумма расстояний до них тоже была 500 метров. Через какое-то время Вася проехал все пять ворон, но не доехал до светофора. И снова сумма расстояний до ворон оказалось 500 метров! Каково было в этот момент расстояние до светофора?

5-2. За круглым столом сидят 100 человек, каждый из которых или рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда лжет. Им раздали по одной карточке с числами $1, 2, 3, \dots, 100$, все карточки различны. Каждый увидел числа у своих соседей и сказал: «Моё число больше, чем у двух моих соседей!» После этого n людей сказали: «Моё число меньше, чем у двух моих соседей!» При каком наибольшем n такое могло произойти? Приведите пример такого количества и докажите, что большего числа быть не может.

5-3. На конкурсе головоломок было 10 детей, все решали общие 10 головоломок. Все участники решили разное число головоломок, а каждая головоломка была решена одинаковым количеством участников. Толя решил головоломки №1-№4 и не решил головоломки №5-№9. Можно ли узнать, решил ли он головоломку №10?

5-4. Панда и Вомбат играют в игру, делая ходы по очереди, начинает Панда. Сначала Панда ставит фишку на любую клетку полосы 1×1000 . Далее, начиная с Вомбата, игроки по очереди двигают фишку влево или вправо либо на 1, либо на 4, либо на 7 клеток. Нельзя выходить за пределы полосы и нельзя ставить фишку на клетку, где она уже была. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто может выиграть в этой игре вне зависимости от действий соперника?

5-5. У кошатницы Изольды живёт много котов. Каждый день у всех котов, за исключением одного, увеличивается и вес, и блеск шерсти; а у оставшегося кота — только одно из этих качеств, а с другим может происходить что угодно. После 45 дней оказалось, что все коты стали такими же, как были в начале. Найдите наибольшее возможное количество котов у Изольды. Приведите пример такого количества и докажите, что большего числа котов быть не может.

5-6. У кошатницы Изольды было 33 кота одинакового веса. Однажды один кот тайком съел сметану у хозяйки, и поэтому стал весить больше остальных котов. Изольда хочет уличить проказника!

У неё есть большие весы с двумя чашами, на которые можно помещать котов, и весы покажут равновесие или какая чаша перевесила. Однако если два кота хоть раз побывали вместе на одной чаше, то они обиделись друг на друга, и поэтому больше НА ОДНУ чашу их Изольда никак не сможет поместить — коты будут сопротивляться!

Как Изольде найти проказника не более чем за 4 взвешивания?

6 класс (продолжительность — 3.5 часа)

6-1. Невезучая тётя Тамара купила в магазине 20 продуктов. Но кассовый аппарат испортился! Вместо того, чтобы напечатать на чеке все стоимости продуктов и общую сумму, он напечатал все стоимости и среднее арифметическое этих стоимостей, да ещё это среднее арифметическое напечатал на чеке не в конце, а в неизвестном месте списка. Как тёте Тамаре узнать, глядя на чек, общую стоимость покупок?

6-2. На конкурсе головоломок было 10 детей, все решали общие 10 головоломок. Все участники решили разное число головоломок, а каждая головоломка была решена одинаковым количеством участников. Толя решил головоломки №1-№4 и не решил головоломки №5-№9. Можно ли узнать, решил ли он головоломку №10?

6-3. В соревновании участвовало 60 спортсменов, все заняли разные места с 1 по 60. А затем к окончательному подведению итогов подключились команды юристов! В результате под теми или иными предложениями несколько спортсменов было дисквалифицировано, в результате чего все оставшиеся спортсмены поднялись вверх. Оказалось, что все оставшиеся спортсмены поднялись вверх на разное строго положительное количество мест. Какое наименьшее число спортсменов могло быть дисквалифицировано?

6-4. Коля нарисовал по клеточкам квадрат с нечётной стороной. Оказалось, что для некоторого натурального n этот квадрат можно разрезать на квадраты размеров $n \times n$ и $(n + 1) \times (n + 1)$. Докажите, что это можно сделать, используя лишь квадратики одного из этих двух видов.

6-5. В гостиницу заселилось 1000 человек в 500 двухместных номеров. Эти люди были из 32 стран. Оказалось, что нельзя выбрать два номера так, чтобы в них жили представители ровно двух стран. Докажите, что из какой-то страны в гостиницу заселилось не меньше 70 человек.

6-6. По кругу расположены 77 изначально пустых корзин. Панда и Вомбат играют в игру, делая ходы по очереди. Начинает Панда. За ход можно положить в любую пустую корзину K яблоко. Если при этом окажется, что в каждой из двух соседних с K корзин есть по яблоку, то сделавший ход забирает себе по яблоку из этих двух соседних корзин (из самой корзины K яблоко не забирается). Выигрывает тот, кто первым наберёт 1000 яблок. Кто может выиграть в этой игре вне зависимости от действий соперника?

7 класс (продолжительность — 4 часа)

7-1. Невезучая тётя Тамара купила в магазине 20 продуктов. Но кассовый аппарат испортился! Вместо того, чтобы напечатать на чеке все стоимости продуктов и общую сумму, он напечатал все стоимости и среднее арифметическое этих стоимостей, да ещё это среднее арифметическое напечатал на чеке не в конце, а в неизвестном месте списка. Как тёте Тамаре узнать, глядя на чек, общую стоимость покупок?

7-2. Коля нарисовал по клеточкам квадрат с нечётной стороной. Оказалось, что для некоторого натурального n этот квадрат можно разрезать на квадраты размеров $n \times n$ и $(n + 1) \times (n + 1)$. Докажите, что это можно сделать, используя лишь квадратики одного из этих двух видов.

7-3. По кругу расположены 77 изначально пустых корзин. Панда и Вомбат играют в игру, делая ходы по очереди. Начинает Панда. За ход можно положить в любую пустую корзину K яблоко. Если при этом окажется, что в каждой из двух соседних с K корзин есть по яблоку, то сделавший ход забирает себе по яблоку из этих двух соседних корзин (из самой корзины K яблоко не забирается). Выигрывает тот, кто первым наберёт 1000 яблок. Кто может выиграть в этой игре вне зависимости от действий соперника?

7-4. Треугольник ABC таков, что $\angle C = 60^\circ$ и $AC < BC$. Точка D на стороне BC такова, что $BD = AC$. Точка E на прямой AC такова, что $EC = AC$ и $E \neq A$. Докажите, что $DE = AB$.

7-5. По кругу записаны положительные числа a_1, a_2, \dots, a_{100} . Оказалось, что для каждого $i = 1, 2, \dots, 100$ выполнено неравенство $a_i a_{i+1} < a_{i+2}$ (считаем, что нумерация индексов циклическая, то есть что $a_{101} = a_1$ и $a_{102} = a_2$). Какое наибольшее количество чисел, не меньших 1, может быть среди чисел a_1, a_2, \dots, a_{100} ?

7-6. На острове живет 140 человек, каждый или рыцарь, или лжец. У каждого от 1 до 5 знакомых включительно. Каждый заявил: «Среди моих знакомых ровно 2 лжеца!» Чему равно наибольшее возможное количество рыцарей на острове?

8 класс (продолжительность — 4 часа)

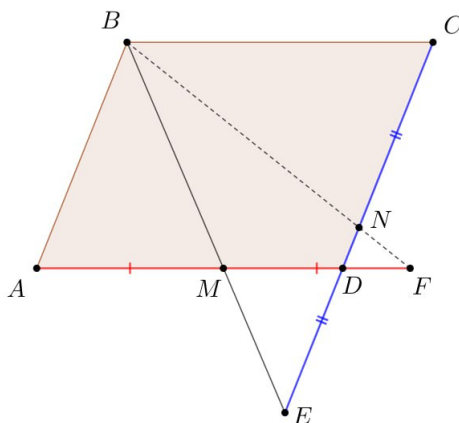
8-1. Докажите, что для любых натуральных чисел a и b существуют натуральные числа x и y такие, что

$$\frac{x}{y+a} + \frac{y}{x+b} = \frac{3}{2}.$$

8-2. Положительные числа a, b, c, d таковы, что $a + c \leq ac$ и $b + d \leq bd$. Докажите, что

$$ab + cd \geq 8.$$

8-3. Дан параллелограмм $ABCD$. На продолжении стороны AD за точку D выбрана точка F , а на продолжении стороны CD за точку D выбрана точка E . M — середина AF , N — середина CE . Оказалось, что точки B, M, E лежат на одной прямой. Докажите, что точки B, N, F тоже лежат на одной прямой.



8-4. На круговой ленте записаны в произвольном порядке 22 единицы, 10 двоек и 10 троек. Докажите, что эту ленту удастся разрезать на две части с равными суммами чисел в частях.

8-5. Натуральные числа $13, 133, 1333, \dots$ будем называть *особыми*. Имеется полоска со 100 клетками. Панда и Вомбат играют в игру, делая ходы по очереди, начинает Панда. За ход можно написать в самую левую незаполненную клетку любую цифру (первым ходом нельзя писать 0). Когда все 100 клеток заполнены, то если считывать цифры слева направо, то получится 100-значное число. Панда победит, если оно не делится ни на одно особое число, а Вомбат победит, если делится хоть на одно особое число. Кто может выиграть в этой игре вне зависимости от действий соперника?

8-6. В графе N вершин. В одной вершине находится невидимый дух, а в некоторых вершинах находятся охотники (в одной вершине может быть несколько охотников). Охотники хотят снять невидимость с духа. На каждом ходу все охотники одновременно стреляют заклятием снятия невидимости: каждый охотник стреляет в любую вершину, с которой он соединён ребром (в том числе он может стрелять в вершину, где находится другой охотник). Охотники совместно определяют, кто куда стреляет. После чего, если хоть один охотник выстрелил в вершину с духом, то дух становится видимым, и охота заканчивается. Иначе дух или остается в текущей вершине, или перемещается в одну из её соседей. Охотники никуда не перемещаются. Далее процесс повторяется.

У охотников есть алгоритм, позволяющий им сделать духа видимым за не более чем X ходов, вне зависимости от начального расположения духа и его перемещений. Докажите, что тогда есть алгоритм сделать духа видимым за не более чем 2^N ходов.